第14卷 第1期
1990年3月

水生生物学报
ACTA HYDROBIOLOGICA SINICA

Vol. 14, No. 1
Mar., 1990

具体长结构的鱼类种群的数学模型及其应用

陈燕国

(水利部
中国科学院 水库渔业研究所,武汉)

提　　要

本文报道了一个新的鱼类种群的数学模型，它是一阶变系数线性偏微分方程。该模型可用于预测某一水域中某种鱼类种群不同体长的鱼的数量随时间变化的情况。

关键词　鱼类种群动态,数学模型,一阶线性偏微分方程

鱼类种群数量变动的数学模型的建立及模型的分析和计算，在鱼类资源的评估中是非常重要的。鱼类种群数量变动的数学模型的研究首先是从单种群开始的，并假定环境是定常的,如 Shaefer 模型[5]和 Beverton-Holt 模型等[3]。这样一些模型因为形式简单,易于分析和计算而被广泛地应用于鱼类种群数量变动的研究中。

但是,从这些模型中不能得到种群的年龄组成和不同规格在种群中占有的比例。1978年 R. Deriso 建立了具有年龄结构的鱼类种群的数学模型[4], 1987年 J. Schnute 建立了具有体长结构的鱼类种群的数学模型[6]。然而,在 Schnute 的研究中,忽略了捕捞死亡和自然死亡之间的差别，在鱼类生长上，Schnute 假定鱼类体重的变化符合 Von Bertalanffy 方程,而实际的研究表明鱼类体长的变化更符合 Von Bertalanffy 方程;在 Schnute 的模型中,还没有考虑人工放养的水域中,鱼类种群的数量变动情况。

本研究,由于注意了上述情况,最后得到了描述单种群具有体长结构的一阶变系数线性偏微分方程。

模型的建立

在模型的建立过程中，是以湖泊或水库为背景的。假定所研究的水域是某湖泊或水库,这种独立的水域处在正常的条件之下,所谓正常的条件是该水域既没有流行病，水文因子又没有激烈的变化,也没有出现引起鱼类组成突变的现象。

我们采用不同于 Schnute 的做法，即以体长反映规格，研究栖息于该正常的水域中

本文得到导师曾祥金副教授和$\boxed{\text{陈敬存}}$副研究员的指导,一并致以衷心感谢。
1988年9月26日收到。

并且自行繁殖的鱼类种群的数量变化情况。设刚出膜时的体长为 l_0（假定同一批出生的鱼具有相同的体长），描述鱼类种群的体长随时间的变化采用 Bertalanffy 方程，即：

$$l = l_t = l_\infty(1 - e^{-k(t-t_0)}) \tag{1}$$

(1) 式中，l_∞ 为该种鱼类在生活史中所能达到的最大体长或渐近体长，k, t_0 为 Von Bertalanffy 常数。

如果没有捕捞，这群鱼生长到生理年龄的极限后，便都将死亡，假定鱼类连续产卵，水域中不断有 A 数量的幼鱼进行补充，那么水域中不同体长鱼的数量呈现稳定的分布。如果 A 不是常数而是一个随时间变化的量，那么水域中不同体长鱼的数量分布也将随时间而变化。

进一步考虑到捕捞对鱼类种群数量的影响，设可捕长度为 l_m，并假定网具具有严格的选择性（"Knife-edged" Selectivity），为了建立数学模型引入如下的符号：

$N(t)$——表示 t 时刻水域中某一鱼类种群的全体；

$N(l, t)$——表示 t 时刻水域中该鱼类种群中体长在 l 之下的鱼的数量。

严格地讲，$N(l, t)$ 是一阶梯函数，但不妨先将其看作对两个变量都是连续变化的，并进一步地假定 $N(l, t)$ 的一阶偏导数存在，并且 $\frac{\partial N}{\partial l}$，$\frac{\partial N}{\partial t}$ 都是连续的。令

$$P(l, t) = \frac{\partial N}{\partial l},$$

称 $P(l, t)$ 为鱼类按体长分布的密度函数，设研究的时刻为 t，让时间增加 Δt，经过 Δt 时段，鱼的体长将要增加 $\Delta l'$，那么在 $t + \Delta t$ 时刻，体长在 $[l + \Delta l, l + \Delta l + \Delta l']$ 中鱼的数量为 $P(l + \Delta l', t + \Delta t)\Delta l$. 再引入下面的记号：

$D_{\Delta l,\Delta t}(l, t)$——表示体长在区间 $[l, l + \Delta l]$ 中，在时间区间 $[t, t + \Delta t]$ 中鱼的死亡数量；

$F_{\Delta l,\Delta t}(l, t)$——表示体长在区间 $[l, l + \Delta l]$ 中，在时间区间 $[t, t + \Delta t]$ 中被捕捞的鱼数量。

由此便有：

$$P(l, t)\Delta l - P(l + \Delta l', t + \Delta t)\Delta l = D_{\Delta l,\Delta t}(l, t) + F_{\Delta l,\Delta t}(l, t)$$

从而有：

$$\frac{P(l + \Delta l', t + \Delta t) - P(l, t + \Delta t)}{\Delta t} + \frac{P(l, t + \Delta t) - P(l, t)}{\Delta t} = -\frac{D_{\Delta l,\Delta t}(l, t)}{\Delta l \Delta t} - \frac{F_{\Delta l,\Delta t}(l, t)}{\Delta l \Delta t} \tag{2}$$

在 (2) 式中，令 $\Delta t \to 0$, $\Delta l \to 0$, 由 (1) 式，有 $\Delta l' \to 0$, 为了简便起见，记：

$$d(l, t) = \operatorname*{limit}_{\substack{\Delta t \to 0 \\ \Delta l \to 0}} \left(\frac{D_{\Delta l,\Delta t}(l, t)}{\Delta l \Delta t} \Big/ P(l, t) \right) \tag{3}$$

$$f(l, t) = \operatorname*{limit}_{\substack{\Delta t \to 0 \\ \Delta l \to 0}} \left(\frac{F_{\Delta l,\Delta t}(l, t)}{\Delta l \Delta t} \right) \tag{4}$$

这样，由 (2) 式得到：

$$\frac{dl}{dt}\frac{\partial P}{\partial l}+\frac{\partial P}{\partial t}=-d(l,t)P(l,t)-f(l,t) \tag{5}$$

(3) 式为死亡率密度函数，(4) 式为捕捞数量密度函数。

如果 $t=0$ 表示研究某水域的最初时刻。假定在此之前水域中已经栖息有所要研究的鱼类种群，不同体长的分布密度函数设为 $P_0(l)$，则有：

$$P(l,0)=P_0(l) \tag{6}$$

通过对水域的实际调查，可以估计 $P_0(l)$.

设鱼群产卵后刚出膜时的体长为 l_0，任何时刻体长为 l_0 的分布由刚出膜的幼鱼数量确定，不同的时刻可能其分布也不一定相同。用 $A(t)$ 来反映它们的变化，便有：

$$P(l_0,t)=A(t) \tag{7}$$

综合 (5)—(7) 便得到描述水域处在正常条件下不同体长鱼的数量分布的数学模型：

$$\begin{cases}\frac{dl}{dt}\frac{\partial P}{\partial l}+\frac{\partial P}{\partial t}=-d(l,t)P(l,t)-f(l,t)\\ P(l,0)=P_0(l)\\ P(l_0,t)=A(t)\end{cases} \tag{8}$$

称 (8) 式为具体长结构的鱼类种群的数学模型。

在湖泊或水库的渔业科学研究中，往往采用人工放养，此即人工种群。无论是人工种群还是自然种群，如果仅考虑它们在数量上的增与减，则它们在数量上的减少都同样是因为自然死亡和捕捞死亡；而它们在数量上的增加，人工种群是因为放养量的变化，自然种群则是因为自然出生率的变化。

设 $C_{\Delta l,\Delta t}(l,t)$ 表示在时间区间 $[t,t+\Delta t]$ 中放养的体长在区间 $[l,l+\Delta l]$ 中的数量，定义：

$$c(l,t)=\operatorname*{limit}_{\substack{\Delta t\to 0\\ \Delta l\to 0}}\left(\frac{C_{\Delta l,\Delta t}(l,t)}{\Delta l\Delta t}\right) \tag{9}$$

称 $c(l,t)$ 为放养密度函数，这时，便得到如下描述人工种群不同体长鱼的数量变化的数学模型

$$\begin{cases}\frac{dl}{dt}\frac{\partial P}{\partial l}+\frac{\partial P}{\partial t}=-d(l,t)P(l,t)-f(l,t)+c(l,t)\\ P(l,0)=P_0(l)\\ P(l_0,t)=0\end{cases} \tag{10}$$

称 (10) 为具体长结构的人工种群的数学模型。

模型应用举例

连续型数学模型的建立有助于对鱼类种群的变化进行理论分析，而实际的问题往往要求数值计算以预报水域中鱼类种群数量上的变化。

为了说明如何利用数学模型进行计算，根据以前的渔获物资料[2]进行了计算（其中鲢

的生长方程中的 k 和 t_0 参照了阮景荣的计算结果[1]，鲢刚出膜时的体长 $l_0 = 0.491$ cm 由本所刘友亮同志提供）

根据实例，可得差分格式：

$$P_{ij} = A_{ij}P_{i+1j} + B_{ij}P_{ij-1} - C_{ij}$$

其中：

$$A_{ij} = \frac{\tau k l_\infty e^{-k(t_j - t_0)}}{k l_\infty \tau e^{-k(t_j - t_0)} + h + h\tau d_{ij}}$$

$$B_{ij} = \frac{h}{k l \tau e^{-k(t_j - t_0)} + h + h\tau d_{ij}}$$

$$C_{ij} = \frac{h\tau(f_{ij} - c_{ij})}{k l_\infty \tau e^{-k(t_j - t_0)} + h + h\tau d_{ij}}$$

$$i = 1, \cdots NN = \left[\frac{l_\infty - l_0}{h}\right],\ j = 1, \cdots M \quad M = \left[\frac{t_\lambda}{\tau}\right]$$

1973 年春未放湖鱼种数和 1973 年底捕捞的成鱼数（表 1）。取 $l = 3.3$(cm)，分别令 $l_1 = 6.6$(cm)，$l_2 = 9.9$(cm)，$l_3 = 13.2$(cm)，$l_4 = 16.5$(cm)，则有：

$$P(l_1, 0) = 80.1802,\ P(l_2, 0) = 1530.6306$$

$$P(l_3, 0) = 1323.1231,\ P(l_4, 0) = 69.0691$$

表 1　1973 年放养及回捕资料

Tab. 1　The stocking and recapture number in 1973

规格（厘米） Length size (cm)	放湖鱼种数（尾） Stocking number	回捕数（尾） Recapture number
6.60—9.90	50 888	2
9.91—13.20	970 644	641
13.21—16.50	839 046	8 142
16.51—22.10	43 776	5 100

不同体长的鱼的死亡率按下式计算：

$$d(l, t) = \frac{D_{\Delta l, \Delta t}(l, t)}{\Delta l \Delta t P(l, t)}$$

对于最初的不同体长鱼的死亡率大小采用下述原则估计：幼鱼死亡率高，而成鱼死亡低，我们选择：

$$d(l_1, 1) = 0.99,\ d(l_2, 1) = 0.90$$

$$d(l_3, 1) = 0.10,\ d(l_4, 1) = 0.00$$

利用前面的差分格式，在计算机计算得到了 5—9 月不同体长鱼数量的预测值（表 2）。

东湖中 1973 年底留存的不同体长鲢的数量（表 3）。

从前面的计算可以看出，新产生的数学模型能获得更多的有关鱼类种群数量变化的数据资料，这对于了解水域中鱼类种群的大小、种群的结构，确定捕捞力量、网具和网目的大小，确定放养鱼种不同规格的比例，以调整种群的结构都是有帮助的。同时，它需要做更细致的种群统计。

表2 1973年东湖中不同规格鲢的预测表

Tab. 2 The predicting values of Silver carp of different sizes in Donghu Lake, in 1973

规格 Length \ 月份 Month of the year / 数量 Number	4	5	6	7	8	9
6.60—9.90 (cm)	51 155	19 883	23 613	4 045	591	72
9.91—13.20 (cm)	975 741	524 684	498 388	89 623	13 728	1 753
13.21—16.50 (cm)	843 452	738 531	34 926	352 886	72 852	11 858
16.51—22.10 (cm)	44 006	438 531	513 126	583 779	161 253	33 168

表3 不同规格鲢的数量的估计

Tab. 3 The estimating values of Silver carp of different sizes

规格(厘米) Length (cm)	数量(尾) Number
6.60—9.90	70
9.91—13.20	1 117
13.21—16.50	3 721
16.51—22.10	28 066

参 考 文 献

[1] 阮景荣，1986。武汉东湖鲢、鳙生长的几个问题的研究。水生生物学报，**10**(3): 252—263。

[2] 湖北省水生生物研究所第四室鱼类生态组，1976。武昌东湖渔获物的分析研究及合理放养的初步探讨，水生生物学集刊，**6**(1): 16—26。

[3] Beverton, R. J. & Holt, S. J., 1957. On the dynamics of exploited fish populations. U. K. Min. Agric. Fish. Invest (ser. 2) 19. p. 533.

[4] Deriso, R. B., 1978. Nonlinear age-structured models for seasonally breeding populations. Ph. D. dissertation. Biomathematics program. Univ. Washington, Seattle, Wash. p. 160.

[5] Schaefer, M. B., 1975. A study of the dynamics of fisheries for yellowfintuna in Eastern Tropical Pacific Ocean. *Bull. Int. Am. Trop. Tuna. Comm.*, (2): 247—285.

[6] Schnute, J., 1987. A General Fishery Model for a Size-Structured Fish Population. *Can. J. Fish. Aquat. Sci.*, **44**: 924—940.

A BODY-LENGTH-STRUCTURED MATHEMATICAL MODEL FOR FISH POPULATION STUDY AND ITS APPLICATION

Chen Yanguo

(Institute of Reservoir Fisheries Academia Sinica, Wuhan)

Abstract

In the study of fish population dynamics, it is a necessary tool to develop mathematical models. We have developed a new mathematical model in this paper, which is one order linear partial differential equation with variable coefficient. The new model is superior to the models obtained in the past, and can been used to estimate the numbers of different sizes in one species fish population.

Key words　Fish population dynamics, Mathematical model, One order linear partial differential equation