

鱼类的重量-身体维数关系的研究

华元渝 阮景荣

(中国科学院水生生物研究所)

提 要

在运用一元数学公式: $W = aL^b$ (或 $W = aL^b$) 来描述鱼类的重量与身体维数关系时存在许多缺陷。作者从确立一条模式鱼的边界曲线方程出发, 应用求旋转体体积的方法建立了鱼类重量与长度、体高的多元数学公式:

$W = aL^{b_1}H^{b_2}$ (或 $W = aL^{b_1}H^{b_2}$), 并推演出鱼类重量与长度、体高、体周长之间的另外两种关系式:

$$W = aL^{b_1}S^{b_3} \quad (\text{或 } W = aL^{b_1}S^{b_3})$$

$$\text{和 } W = aL^{b_1}H^{b_2}S^{b_3} \quad (\text{或 } W = aL^{b_1}H^{b_2}S^{b_3})。$$

上述几类多元数学公式在用来拟合白鲢、翘嘴红鲌和长春鲌种群及它们的不同生长阶段的观测数据时, 都比一元数学公式更接近于实际情况, 由多元数学公式进行预报的精度也比一元数学公式高。

多元数学公式之所以优于一元数学公式是因为多元数学公式能够较全面地反映不同维数对鱼体重量的综合影响。对于不同体形的鱼类, 不同维数对重量影响的程度是不同的, 因此应用时应有所选择。

从多元数学公式的组成及应用情况看, 真正有使用价值的是考虑了体周长的二元数学公式。由于体高易于测量, 为此考虑了体高的二元数学公式更具有实用价值。

作者建议, 在鱼类生长的理论与应用研究中, 可采用:

$$W = aL^{b_1}H^{b_2} \quad (\text{或 } W = aL^{b_1}H^{b_2})$$

$$\text{和 } W = aL^{b_1}S^{b_3} \quad (\text{或 } W = aL^{b_1}S^{b_3})$$

来描述鱼类的重量与身体维数之间的关系。

一、前 言

在鱼类生长的理论与应用研究中, 通常需要运用数学公式来描述鱼类的重量与身体维数¹⁾之间的关系, 以便根据这种关系推算已知维数的个体(或年龄群)的未知重量。

本世纪初, 人们把鱼的重量看作是线性维数-长度的函数, 并且按照鱼类生长过程中体形恒定(即等距生长)和比重保持不变的假定, 应用立方法则来表示这种函数关系^[1], 即

$$W = KL^3 \quad (1)$$

式中, W 为重量, L 为长度, K 为常数。这个公式一度被许多学者所采用, 但仅在某些鱼类

1) “维数”本来指长、宽、高。由于鱼的体宽不便测量, 这里采用的是长度、体高和体周长。鱼的体周长包含体高和体宽。

编辑部收到稿件日期: 1982年1月4日。

的应用上获得了较好的结果^[10,15,17]。后来,不少学者认为这些成功的例子不过是一种特殊情况,并指出绝大多数鱼类的重量与长度并非成简单的立方关系^[9,11,13,14]。

自从 Huxley (1924)^[12] 应用非等距公式 $y = bx^R$ 描述鱼体各部分的相对生长之后,一个类似于 $y = bx^R$ 的公式逐渐地取代了公式(1),而被广泛地应用于鱼类生长的研究^[8]。这个公式是

$$W = aL^b \quad (2)$$

表 1 东湖 3 种鱼类的身体维数和重量的个体差异

Table 1 Dimensions and weight differences between individuals of three fish populations in lake Tunghu Donghu

鱼名	全长 (厘米)	体长 (厘米)	体高 (厘米)	体周长 (厘米)	重量 (克)	备 注
白 鲢	4.3	3.5	1.1	2.5	0.75	
	4.3	3.5	1.3	2.7	0.9	
	15.5	12.6	3.5	7.8	30.2	
	15.0	12.6	3.9	9.5	38.8	
	32.8	27.3	8.6	19.5	363	
	32.0	27.3	8.8	21.0	430	
	40.6	34.3	10.1	21.5	615	
	40.6	34.7	11.3	25.1	810	
	50.5	42.3	11.4	26.3	1090	
	48.9	42.3	13.8	31.4	1475	♂
	62.8	53.0	14.3	33.0	2135	♂
	61.7	53.0	15.8	36.2	2655	♂
	74.3	64.0	16.5	38.4	3620	♀
	73.2	64.0	19.0	45.3	5075	♀
	81.0	70.3	19.3	46.2	5999	♀
	82.6	70.3	21.7	51.3	6930	
翘嘴红鲌	27.6	22.9	4.8	11.4	92	
	27.8	23.0	5.0	11.7	110	
	48.1	39.6	7.4	17.7	475	
	47.6	39.6	8.0	19.6	575	
	54.7	46.6	9.0	21.7	805	
	56.3	46.8	9.9	23.5	995	
	62.0	52.6	9.8	24.0	1135	
	62.3	53.0	11.3	27.9	1440	
长 春 鳊	24.9	20.3	7.1	15.5	135	
	24.4	20.3	7.9	17.0	160	
	29.4	24.1	9.0	20.0	270	
	28.9	24.1	9.8	21.9	315	
	37.8	31.6	11.0	23.6	485	
	37.0	31.6	12.8	28.0	750	
	41.0	34.7	12.3	26.9	695	
	40.6	34.7	14.2	31.0	972	
	42.9	36.4	15.5	33.0	1149	
	42.1	36.5	13.1	28.0	785	

式中, W 为重量, L 为长度, a 为常数, b 为指数。由于 a 、 b 这两个参数值都可以调整, 因此公式 (2) 比公式 (1) 更适用于描述各种鱼类的重量-长度关系, 并且它的精度也有所提高。

几十年来, 公式 (2) 一直被人们普遍用来描述鱼类的重量-长度关系^[2,5,6,7], 未见报道有关这个一元公式的进一步探讨。作者认为公式 (2) 虽然比公式 (1) 有所改进, 但它和公式 (1) 一样把鱼类生长过程中长度的增长作为影响其重量的唯一因素, 因此这个公式仅描述了鱼类的重量-长度之间的一元函数关系, 即 $W = f(L)$, 这仍然是不合适的。从实际情况来看, 鱼类的身体维数-长度、体高和体周长在同一种群中存在着明显的个体差异, 以致于长度 (全长或体长) 相同或相近的个体, 往往由于体高和/或体周长不同而重量相差很大。例如, 武汉东湖中白鲢全长为 40.6 厘米的个体重量相差 31.7%, 体长为 50.3 厘米的雄性个体重量相差 24.4%, 体长为 64.0 厘米的雌、雄个体重量相差 15.5%; 翘嘴红鲌体长分别为 52.6 和 53.0 厘米的个体重量相差 26.9%; 长春鳊体长为 31.6 厘米的个体重量相差 54.6% (表 1)。因此, 在许多情况下, 根据一元公式 (2) 所确定的重量-长度关系来推算已知长度的个体重量, 会出现较大的误差。

为了解决这个问题, 作者探讨了鱼类的重量与长度、体高和/或体周长之间的相关关系, 初步确定了用于推算鱼类重量的多元相关公式。并且, 通过对白鲢、翘嘴红鲌和长春鳊等 3 种鱼类的观测数据的回归分析, 比较了一元与多元公式的精度及其他统计学指标, 希望从中找到更适合于描述鱼类的重量与身体维数之间的多元函数关系, 即

$$W = f[L(l), H, S]。$$

本工作承武汉大学张尧庭教授热忱指导, 徐绪海、杨曙光、胡绪英和姚永翘等同志协助编制计算机程序和进行数值计算; 采样过程中得到武汉市东湖渔场李开炳、陈昆春等同志大力协助, 在此一并致以谢意。

二、材 料

白鲢 (*Hypophthalmichthys molitrix*)、翘嘴红鲌 (*Erythroculter ilishaeformis*) 和长春鳊 (*Parabramis pekinensis*), 均于 1979—1980 年取自武汉东湖, 其中体长 10 厘米以下的白鲢鱼种取自与东湖连通的天鹅池湖汊。

采集到的鱼类标本, 在起水后就进行了测量和称重, 所测量的身体维数如下:

全长——鱼体最前端 (口闭住) 至尾鳍末端 (使尾鳍的两叶保持自然状态) 的直线长度, 用 L 表示;

体长——鱼体最前端至尾鳍中央鳍条基部的直线长度, 用 l 表示;

体高——鱼体背鳍起点处的垂直高度, 用 H 表示;

体周长——鱼体背鳍起点前的体围大小, 用 S 表示。

长度和体高系用两脚规 (对小鱼) 或卡尺 (对大鱼) 测量, 在米尺上读数。体周长系用尼龙线 (对小鱼) 或塑料量衣尺 (对大鱼) 测量, 前者须在米尺上读数。鱼苗和鱼种的称重分别使用托盘式扭力天平和普通粗天平, 大鱼的称重则用小型磅秤。所有鱼类标本的长度、体高和体周长的测量均读至 1 毫米, 称重则按照鱼体的大小分别读至 0.01 克、0.1 克

和1克。

在测量和称重之后,依照胸鳍的外部特征,对体长48.0厘米以上的白鲢标本进行了性别鉴定。但是,另外两种鱼副性征不显著,故不能区分其成鱼的性别。

根据实际需要,作为计算用的实测数据是从收集到的3种鱼类标本的观测数据中,分别按体长顺序随机地各选用了100尾标本的观测数据(即 $W_i, L(i)_i, H_i, S_i, i = 1, 2, \dots, 100$)而组成。所用标本的体长幅度为:白鲢1.8—71.2厘米(体长48.0厘米以上的标本全部为雌鱼);翘嘴红鲌17.5—75.0厘米;长春鳊17.6—42.1厘米。这些标本基本上包括了东湖这3种鱼的种群中不同大小的个体。

三、数学推导

经统计判断,鱼的重量 W 与鱼体的单个维数,如长度 $L(l)$ 、体高 H 、体周长 S 之间都存在着显著的线性相关(表2)。因此 W 与 $L(l)$ 、 H 、 S 必然有某种函数关系。考虑到 H 与 S 之间指数函数关系(表3), H 的大小在很大的程度上反映了 S 的大小,于是把建立 W 与 $L(l)$ 、 H 关系的数学公式作为探讨鱼的重量与身体维数的多元函数关系的基点。

表2 3种鱼类的重量与其长度、体高、体周长间的线性相关系数及显著性

Table 2 Coefficients of linear correlation and their significance between weight and length, height, circumference respectively in three species of fish

回归方程	白 鲢	翘嘴红鲌	长 春 鳊
$W = a + bL$	0.905001 (很显著)	0.921457 (很显著)	0.947889 (很显著)
$W = a + bH$	0.907331 (很显著)	0.927122 (很显著)	0.954683 (很显著)
$W = a + bS$	0.876912 (很显著)	0.945612 (很显著)	0.976857 (很显著)
$W = a + bS$	0.892039 (很显著)	0.945276 (很显著)	0.974803 (很显著)

1. W 与 $L(l)$ 、 H 关系的数学公式

W 与 l 、 H 的函数关系,将依 l 、 H 的组合方式而不同,这直接关系到所建立的公式的精度。为此,我们从确立一条模式鱼的边界曲线方程出发,通过计算其体积和重量来确定 l 、 H 的组合关系。

假定鱼的体侧投影为流线型平面,并将其上面的一半摆在 I 象限内(图1),于是它的边界曲线方程可求解如下:

设曲线方程为

$$y = ax^2 + bx + c$$

且满足

$$(1) y(0) = 0, y(l) = 0, \quad (1)$$

$$(2) y(x_0) = \frac{1}{2} H, y'(x_0) = 0.$$

于是有

$$(1) c = 0, al^2 + bl = 0$$

$$\text{由此 } y = ax^2 + bx, al + b = 0$$

$$(2) 0 = y'(x_0) = 2ax_0 + b$$

$$\text{由此 } x_0 = -\frac{b}{2a} = \frac{l}{2},$$

$$\frac{1}{2} H = y(x_0) = y\left(\frac{l}{2}\right) = a\left(\frac{l}{2}\right)^2 + b\left(\frac{l}{2}\right) = \frac{bl}{4}$$

故

$$b = \frac{2H}{l}$$

$$a = -\frac{b}{l} = -\frac{2H}{l^2}$$

因此, 鱼的边界曲线方程为:

$$y = \frac{2Hx}{l^2} (l - x)$$

用求旋转体体积的公式计算鱼的体积 $\bar{V}^{[4]}$, 得

$$\bar{V} = \pi \int_0^l y^2 dx = \pi \int_0^l \left[\frac{2Hx}{l^2} (l - x) \right]^2 dx = \frac{2\pi}{15} l^3 H^2$$

象这样求得的 \bar{V} 值与鱼的真实体积 V 有一定的误差, 可以根据压缩原理予以修正, 即 $V = a_1 \bar{V}$ (a_1 为压缩系数)。

按照物理学公式 $W = \rho V$ (ρ 为密度) 计算鱼的重量 W , 得

$$W = \rho V = \rho a_1 \bar{V} = \frac{2\pi \rho a_1}{15} l^3 H^2 = al^3 H^2$$

$$\left(\text{这里令 } a = \frac{2\pi \rho a_1}{15} \right)$$

这样, l 、 H 之间的组合关系被确定为 $l^3 H^2$ 。但是, 在实际运用中, l 、 H 的指数并不一定是以 1 与 2 为最好。因此, W 与 $L(l)$ 、 H 关系的数学公式取为下列形式:

$$W = al^{b_1} H^{b_2} \quad (\text{或 } W = aL^{b_1} H^{b_2}) \quad (3)$$

式中, a 为常数, b_1 和 b_2 为偏指数, $b \left(b = \sum_j b_j, j = 1, 2 \right)$ 为指数。

2. W 与 $L(l)$ 、 S 关系的数学公式

将 3 种鱼类的 H - S 数据点描绘在常用坐标纸上, 初步判断为指数关系 (图 2)。并且按回归方程 $H = aS^b$ 计算了 H 与 S 的相关系数, 几乎接近于 1 (表 3)。因此, H 与 S 之间的关系可用指数方程来表达, 即

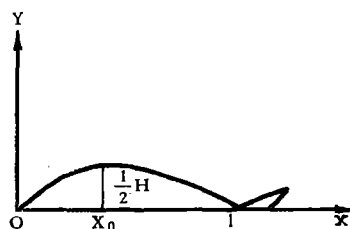


图1 鱼体平面模式

Fig. 1 Plane diagram of a fish

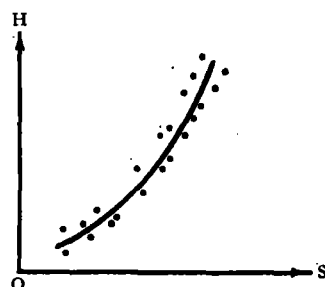


图2 3种鱼类的H-S相关曲线示意图

Fig. 2 Graph of H-S relationship in three species of fish

表3 3种鱼类的重量、体高、体周长之间的指数相关系数(r)

Table 3 Coefficients of exponential correlation (r) between weight, height and circumference in three species of fish

回归方程	长 春 鲌	翘嘴红鲌	白 鲢
$W = aH^b$	0.989567	0.987925	0.990184
$W = aS^b$	0.992023	0.986322	0.993832
$H = aS^b$	0.998937	0.993256	0.997304

$$H = a_1 S^b$$

将 $H = a_1 S^b$ 代入公式(3), 得

$$\begin{aligned} W &= a l^{b_1} H^{b_2} = a l^{b_1} (a_1 S^b)^{b_2} \\ &= a a_1 l^{b_1} S^{b b_2} = a l^{b_1} S^{b_3} \quad (\text{或 } W = a L^{b_1} S^{b_3}) \end{aligned} \quad (4)$$

(这里令 $a = a a_1$, $b_3 = b b_2$)

式中, a 为常数, b_1 和 b_3 为偏指数, $b \left(b = \sum_j b_j, j = 1, 3 \right)$ 为指数。

3. W 与 L(l)、H、S 关系的经验表达式

从公式(3)和(4)的推导过程来看, 是否也能用指数方程来表达 W 与 $L(l)$ 、 H 、 S 之间的关系? 于是分别计算了 3 种鱼类的 W 与 H 或 S 之间的指数相关系数 (r)。计算结果表明, 所有的 r 都大于 0.98 (表 3), 看来 W 与 $L(l)$ 、 H 、 S 关系可用指数方程来表达, 即

$$W = a l^{b_1} H^{b_2} S^{b_3} \quad (\text{或 } W = a L^{b_1} H^{b_2} S^{b_3}) \quad (5)$$

式中, a 为常数, b_1 、 b_2 和 b_3 为偏指数, $b \left(b = \sum_j b_j, j = 1, 2, 3 \right)$ 为指数。

公式(3)–(5)中的参数 a 、 b_1 、 b_2 和 b_3 , 拟采用最小二乘估计。

三、应用结果

应用(2)式和上面推导的(3)、(4)和(5)式, 分别对 3 种鱼类的重量-身体维数的各 100 尾标本的数据进行了回归分析, 所得到的各回归方程的参数值列于表 4。

表 4 3 种鱼类不同回归方程的参数值
Table 4 Parameters of the various regression equations for three species of fish

鱼名 参数值	白 鲢				翘 嘴 红 鲂				长 春 鳊			
	a	b ₁	b ₂	b ₃	a	b ₁	b ₂	b ₃	a	b ₁	b ₂	b ₃
回归方程 $W = aL^b$	0.00753703	3.09539			0.00262047	3.1742			0.0106822	3.01380		
$W = aL^{b_1}H^{b_2}$	0.0286764	2.19479	0.875596		0.0179026	2.02802	1.18660		0.101943	0.921442	2.16048	
$W = aL^{b_1}S^{b_3}$	0.0159997	2.01736		1.03639	0.0063262	2.05759		1.14557	0.0207439	0.906974		2.14633
$W = aL^{b_1}H^{b_2}S^{b_3}$	0.0177008	2.02757	0.13383	0.894232	0.0152667	1.90562	0.88255	0.426626	0.0269204	0.887509	0.344275	1.82643
$W = aI^b$	0.0178272	3.00052			0.00803887	3.02250			0.0246056	2.92666		
$W = aI^{b_1}H^{b_2}$	0.0453082	2.25049	0.752177		0.0359457	1.94411	1.17271		0.118030	1.03534	2.00833	
$W = aI^{b_1}S^{b_3}$	0.0266055	2.07712		0.915788	0.0130716	1.98135		1.12192	0.0269161	1.00116		2.01588
$W = aI^{b_1}H^{b_2}S^{b_3}$	0.0253955	2.07362	-0.0594808	0.978087	0.0300876	1.83423	0.901125	0.387191	0.0349015	0.98067	0.351221	1.69098

按照某一确定的回归方程推算已知身体维数的个体重量 W_i ，所得到的估计量 \hat{W}_i 仅是具有相同身体维数的个体实测重量 W_i 的平均值。那么按照这个回归方程求得的 \hat{W}_i 与 W_i 之间可能有多大的偏差呢？一般来说，按某一回归方程推算时的残差平方和 (Q) 愈小，说明这个回归方程愈好，而剩余标准离差 (σ) 愈小，则表明用这个回归方程预报的精度愈高。为了比较一元与多元回归方程的精度，在求得 3 种鱼类各回归方程的参数值之后，分别将其身体维数数据 (L_i 、 l_i 、 H_i 、 S_i) 回代入各回归方程来推算标本鱼的个体重量，并根据这些标本鱼的 W_i 与 \hat{W}_i 计算了相对误差 (E)、残差平方和 (Q) 及剩余标准离差 (σ)^[1,3]，所得结果列于表 5 和表 6。

表 5 按不同回归方程估算 3 种鱼类个体重量的相对误差的频数分布

Table 5 Frequency distribution of relative errors of individual weights estimated by the various regression equations for three species of fish

鱼名	频数 回归方程	相对误差 (%)	0.0—5.0	5.1—10.0	10.1—15.0	15.1—20.0	20.1—25.0	25.1—30.0	30.1—35.0	35.1—40.0
白鲢	$W = aL^b$		36	34	23	2	5			
	$W = aL^{b_1}H^{b_2}$		47	34	16	2	1			
	$W = aL^{b_1}S^{b_3}$		53	34	11	2				
	$W = aL^{b_1}H^{b_2}S^{b_3}$		52	34	12	2				
	$W = aI^b$		44	32	17	7				
	$W = aI^{b_1}H^{b_2}$		59	31	8	2				
	$W = aI^{b_1}S^{b_3}$		66	26	7	1				
	$W = aI^{b_1}H^{b_2}S^{b_3}$		66	27	6	1				
翘嘴红鲌	$W = aL^b$		53	29	12	3	3			
	$W = aL^{b_1}H^{b_2}$		74	24	1	1				
	$W = aL^{b_1}S^{b_3}$		85	13	1	1				
	$W = aL^{b_1}H^{b_2}S^{b_3}$		74	23	2	1				
	$W = aI^b$		52	31	12	4	1			
	$W = aI^{b_1}H^{b_2}$		70	27	3					
	$W = aI^{b_1}S^{b_3}$		78	18	3	0	1			
	$W = aI^{b_1}H^{b_2}S^{b_3}$		74	22	4					
长春鳊	$W = aL^b$		29	14	22	13	9	4	6	3
	$W = aL^{b_1}H^{b_2}$		62	30	5	3				
	$W = aL^{b_1}S^{b_3}$		74	20	6					
	$W = aL^{b_1}H^{b_2}S^{b_3}$		78	18	4					
	$W = aI^b$		28	20	22	17	12	1		
	$W = aI^{b_1}H^{b_2}$		69	26	4	1				
	$W = aI^{b_1}S^{b_3}$		78	16	6					
	$W = aI^{b_1}H^{b_2}S^{b_3}$		75	21	4					

计算结果表明，由不同回归方程求得的 \hat{W} 与 W 之间的偏差依鱼类不同而有一定的差别，但是 3 种鱼类由多元回归方程求得的 \hat{W} 与 W 之间的偏差，大多小于由一元回归方程求得的 \hat{W} 与 W 之间的偏差。从 3 种鱼类各 100 尾标本鱼中鱼类个体重量的相对误差值及其频数分布来看，按多元回归方程推算时，81—98% 的相对误差在 0.0—10.0% 的范围内，

其中数值小于 5.0% 的相对误差为 47—85%; 而按一元回归方程推算时, 数值大于 10.0% 的相对误差占 16—57%, 并且它们的散布范围比多元回归方程大得多(表 5)。同时, 按多元回归方程推算时的残差平方和与剩余标准离差, 比按一元回归方程推算时的分别小 42.7—91.9% 和 23.9—71.4%, 其中以对长春鳊推算时的残差平方和及剩余标准离差减小的幅度最大(表 6)。

表 6 3 种鱼类不同回归方程的残差平方和(Q)及剩余标准离差(σ)

Table 6 Sum of squares of deviations (Q) and surplus standard deviations (σ) from the various regression equations for three species of fish

项目 回归方程	鱼名	Q (g^2)			σ		
		白 鲢	翘嘴红鮰	长 春 鳊	白 鲢	翘嘴红鮰	长 春 鳊
$W = aL^b$		3263850.0	551276.0	631476.0	182.495	75.0017	80.2722
$W = aL^{b_1}H^{b_2}$		1592540.0	243205.0	77443.5	128.132	50.0726	28.2557
$W = aL^{b_1}S^{b_3}$		1152560.0	259663.0	50989.4	109.005	51.7391	22.9274
$W = aL^{b_1}H^{b_2}S^{b_3}$		1172500.0	220825.0	52038.4	110.515	47.9611	23.2823
$W = aI^b$		2855840.0	474360.0	526689.0	170.708	69.5730	73.3101
$W = aI^{b_1}H^{b_2}$		1636620.0	221645.0	69515.0	129.894	47.8017	26.7703
$W = aI^{b_1}S^{b_3}$		1072960.0	246675.0	42640.2	105.173	50.4286	20.9664
$W = aI^{b_1}H^{b_2}S^{b_3}$		1055080.0	208028.0	43994.0	104.835	46.5506	21.4073

我们又以 2 倍的剩余标准离差(即 2σ) 作为 3 种鱼类 95% 的估算值的置信区间, 可以看出多元回归方程的精度比一元回归方程提高了 24—71%。

上述结果一致表明多元回归方程优于一元回归方程, 我们认为这主要是多元回归方程反映了 $L(I)$ 、 H 、 S 诸因素对 W 的影响。但是, 在多元回归方程中, $L(I)$ 、 H 、 S 对 W 的影响各有多大呢? 或者说这几个因素中哪一个是主要的或次主要的呢? 弄清这个问题, 有助于解释各多元回归方程精度上的差别, 从而为合理地选用多元回归方程提供依据。为此, 我们采用 W 对 $L(I)$ 、 H 、 S 的偏回归平方和的大小来判别因素的主次关系, 某一因素的偏回归平方和越大, 则表明该因素越重要, 于是分别计算了 3 种鱼类多元回归方程中 W 对每个自变量, 即 $L(I)$ 、 H 、 S 的偏回归平方和^[1,3], 所得结果列于表 7。由表 7 可见, 对于白鲢和翘嘴红鮰来说, W 对 $L(I)$ 的偏回归平方和最大, 故长度是影响 W 的主要因素; 其次要因素分别是体周长和体高, 更次因素则分别是体高和体周长。但是, 对于长春鳊来说, 在二元回归方程中体周长或体高是主要因素, 长度是次要因素; 而在三元回归方程中体高与长度的主次关系却有所变动。

为了进一步判定所求得的多元回归方程是否反映了客观规律, 采用 F 统计量分别对一元与多元回归方程及其回归系数 b_1 、 b_2 和 b_3 进行显著性检验, 所得结果列于表 8。由表 8 可见, 一元、二元回归方程及其回归系数都是有意义的, 而对三元回归方程来说, 可能是 H 、 S 之间存在的特定关系, 使有的结果只表现出其中一个因素的作用。因此, 结合表 6、表 7 和表 8 看来, 在所求得的多元回归方程中, 真正有实用意义的还是由 W 与 $L(I)$ 、 H 或 S 所组合的二元回归方程。

表 7 3 种鱼类多元回归方程中 W 对于每个自变量的偏回归平方和 (P_i)
 Table 7 Partial regression sum of squares (P_i) of W to the every independent variable in the
 multiple regression equations for three species of fish

回 归 方 程	白 鲢				翘 嘴 红 鲂				长 春 鳊			
	$P_{L(t)}$	P_H	P_S	主次关系	$P_{L(t)}$	P_H	P_S	主次关系	$P_{L(t)}$	P_H	P_S	主次关系
$W = aL^b_1H^b_2$	0.635871	0.107871		$L > H$	0.179104	0.0587939		$L > H$	0.0595674	0.334633		$H > L$
$W = aL^b_1S^b_3$	0.218577		0.0530106	$L > S$	2.26054		0.719933	$L > S$	0.907508		4.82586	$S > L$
$W = aL^b_1H^b_2S^b_3$	0.400995	0.00299564	0.010448	$L > S > H$	0.128156	0.0136415	0.00278881	$L > H > S$	0.868973	0.127960	3.49454	$S > L > H$
$W = aL^b_1H^b_2$	0.655922	0.0733629		$L > H$	0.178300	0.056424		$L > H$	0.0658953	0.235767		$H > L$
$W = aL^b_1S^b_3$	0.433618		0.0861625	$L > S$	0.156960		0.044262	$L > S$	0.0633368		0.251645	$S > L$
$W = aL^b_1H^b_2S^b_3$	0.216929	0.00178269	0.0472141	$L > S > H$	1.62933	0.452166	0.0822433	$L > H > S$	0.987267	0.133176	2.99545	$S > L > H$

表 8 3 种鱼类不同回归方程的 F 统计量及显著性
Table 8 Statistics F and their significance of the various regression equations for three species of fish.

鱼名 F 值 回归方程	白 鲢				翘 嘴 红 鲮				长 春 鳊			
	F	F_{b_1}	F_{b_2}	F_{b_3}	F	F_{b_1}	F_{b_2}	F_{b_3}	F	F_{b_1}	F_{b_2}	F_{b_3}
$W = aL^b$ (很显著)	5091.5 (很显著)				4149.9 (很显著)				702.78 (很显著)			
$W = aL^{b_1}H^{b_2}$ (很显著)	6919.53 (很显著)	811.471 (很显著)	137.661 (很显著)		6248.06 (很显著)	466.882 (很显著)	153.262 (很显著)		4012.65 (很显著)	93.1786 (很显著)	523.452 (很显著)	
$W = aL^{b_1}S^{b_2}$ (很显著)	9533.33 (很显著)	320.240 (很显著)		77.6666 (很显著)	5849.99 (很显著)	4558.37 (很显著)		1451.74 (很显著)	6111.25 (很显著)	2036.76 (很显著)		10830.9 (很显著)
$W = aL^{b_1}H^{b_2}S^{b_3}$ (很显著)	6984.72 (很显著)	584.450 (很显著)	0.436614 (不显著)	15.2232 (显 著)	5110.18 (很显著)	357.371 (很显著)	38.0401 (显 著)	7.77678 (较显著)	4444.26 (很显著)	1959.51 (很显著)	288.548 (很显著)	7880.11 (很显著)
$W = aI^b$ (很显著)	5825.95 (很显著)				4830.74 (很显著)				852.35 (很显著)			
$W = aI^{b_1}H^{b_2}$ (很显著)	6732.27 (很显著)	1131.20 (很显著)	126.522 (很显著)		6858.93 (很显著)	454.172 (很显著)	143.726 (很显著)		4473.98 (很显著)	114.795 (很显著)	410.724 (很显著)	
$W = aI^{b_1}S^{b_2}$ (很显著)	10285.93 (很显著)	959.798 (很显著)		190.718 (很显著)	6159.71 (很显著)	304.019 (很显著)		86.0502 (很显著)	7314.2 (很显著)	154.336 (很显著)		613.194 (很显著)
$W = aI^{b_1}H^{b_2}S^{b_3}$ (很显著)	7772.25 (很显著)	475.615 (很显著)	0.390853 (不显著)	103.516 (很显著)	5426.03 (很显著)	4368.00 (很显著)	1212.19 (很显著)	220.482 (很显著)	5261.29 (很显著)	2421.96 (很显著)	326.708 (很显著)	7348.43 (很显著)

五、讨 论

1. 鱼类的生长通常采用重量与长度相关的一元公式来描述整个种群的特征。不少研究指出,鱼类在不同生长阶段可能有着不同的重量-长度关系,而且这种关系依照性别、成熟度、季节和生活环境的不同也会有某种程度的差别^[5,7]。因此,在根据一元公式确定鱼类的重量对长度的回归方程时,通常需要按照生长阶段、性别等分别计算各自的参数。

本文推导的多元相关公式,由于比较全面地表达了鱼类的重量-身体维数关系,因而在用来拟合整个种群的观测数据时,获得了明显优于一元公式的结果。多元公式为什么比一元公式好?从生物学角度看,一元公式 $W = aL^b$ 中, b 表示为重量相对生长率与长度相对生长率的比值^[16],即衡量长度对重量影响的尺度。从数学角度看,由于

$$a = \frac{W_i}{L_i} \cdot \frac{1}{L_i^{b-1}} \quad [6]$$

表明 a 值的变化是依赖于 b 值的变化的,每当 b 值发生微小变化, a 值就要明显地改变。而多元式 b 值既可以作为衡量鱼类生长的一个特征数,也是衡量身体维数对鱼体重量影响的综合尺度,即 b 值的大小取决于各偏指数 $b_j (j = 1, 2, 3)$ 的和;而一元公式中的 b 值则不能看作长度对重量单独影响的尺度,因为它实际上包含了未考虑的其他维数的影响,这种影响不能通过相应的维数体现出来,因而在估算同一种鱼的重量时,一元公式预报的精度不及多元公式。但是,在按照生长阶段和性别来进行重量-身体维数数据的回归分析时,多元公式是否仍然优于一元公式?为了回答这个问题,我们以白鲢为例,采用一元与二元公式进行了 4 组观测数据的回归分析。所用的前 3 组标本,系由原来的 100 尾标本

表 9 按不同回归方程估算白鲢四组标本重量的相对误差的频数分布

Table 9 Frequency distribution of relative errors of individual weights estimated by the various regression equations for four groups of specimens of silver carp

组别 (标本数)	频数 回归方程	相对误差(%)					
		0.0 5.0	5.1 10.0	10.1 15.0	15.1 20.0	20.1 25.0	25.1 30.0
I (35)	$W = aL^b$	9	16	6	3	1	
	$W = aL^{b_1}H^{b_2}$	23	8	2	2		
	$W = aL^{b_1}S^{b_3}$	20	11	3	1		
II (35)	$W = aL^b$	17	13	3	2		
	$W = aL^{b_1}H^{b_2}$	29	5	1			
	$W = aL^{b_1}S^{b_3}$	32	2	1			
III (30)	$W = aL^b$	15	10	4	1		
	$W = aL^{b_1}H^{b_2}$	23	7				
	$W = aL^{b_1}S^{b_3}$	26	4				
IV (30)	$W = aL^b$	13	7	3	6		1
	$W = aL^{b_1}H^{b_2}$	19	8	3			
	$W = aL^{b_1}S^{b_3}$	27	3				

按体长 1.8—19.2、20.1—47.7 和 48.6—71.2 厘米重新组合的; 第四组是另外选用的雄鱼标本, 其体长幅度与第三组(雌鱼)相同。现将所得到的主要结果列于表 9 和表 10。

由表 9 和表 10 可以看出, 在分组计算的情况下, 采用一元与二元公式的计算结果亦有明显的差别。按所求得的二元回归方程推算个体重量时, 88.6—100.0% 的相对误差在 0.0—10.0% 的范围内, 其中数值小于 5.0% 的相对误差为 57.1—91.4%; 而按一元回归方

表 10 白鲢 4 组标本的不同回归方程的残差平方和(Q)及剩余标准离差(σ)

Table 10 Sum of squares of deviations (Q) and surplus standard deviations (σ) from the various regression equations for four groups of specimens of silver carp

组 别	Q (g^2)			σ		
	$W = aL^b$	$W = aL^b H^{b_2}$	$W = aL^b S^{b_3}$	$W = aL^b$	$W = aL^b H^{b_2}$	$W = aL^b S^{b_3}$
I	202.141	102.196	53.5620	2.47497	1.78707	1.29376
II	263184.0	49380.5	32466.9	89.3044	39.2828	31.8527
III	2423990.0	606348.0	517571.0	294.229	149.858	138.453
IV	7605790.0	1726760.0	448097.0	521.186	252.891	128.826

程推算时, 数值大于 10.0% 的相对误差占 14.3—33.3%, 数值小于 5.0% 的相对误差则仅占 25.7—50.0%。按二元回归方程推算时的残差平方和比一元回归方程小 49.4—94.1%, 剩余标准离差小 27.8—75.3%, 即预报的精度相应地提高了 28—75%。由此可见, 分组计算时, 二元公式的准确性比前面按照 100 尾标本计算时有进一步的提高。

因此, 和一元公式比较, 无论是对于整个种群还是种群的某个部分, 多元公式所描述的重量-身体维数关系都更加接近于实际情况。多元公式的应用, 虽然在一定的程度上会增加标本测量的工作量, 但是它却能提供更为满意的推算结果。看来, 在鱼类生长的研究工作中, 应当尽可能地采用多元公式。

2. 鱼类和其他动物一样, 随着身体各部分的生长而重量相应地增加, 因此鱼体的重量与维数之间明显地存在着相关关系(表 11)。经多元回归分析得知(表 7), 鱼体的不同维数对重量有着不同程度的影响。这样, 在推算鱼体过去的重量时, 特别要注意对不同体型的鱼类要采用不同的身体维数(表 11)。从这里可以看出, 关于鱼体的重量与长度相关的一元公式, 只能用来描述体形主要受长度制约的大多数鱼类的基本特征。而对于体形构成上其他维数占主导地位的一些鱼类显然是不适用的。

表 11 3 种鱼类的重量与身体维数的相关系数(r)及回归方程的残差平方和(Q)

Table 11 Correlation coefficients (r) between weights and dimensions and sum of squares of deviations (Q) of the regression equations for three species of fish

项目 鱼名 回归方程	r			Q (g^2)		
	白 鲢	翘嘴红鲌	长 春 鲌	白 鲢	翘嘴红鲌	长 春 鲌
$W = aH^b$	0.990184	0.987925	0.989567	6688990	1133940	201112
$W = aS^b$	0.993832	0.986322	0.992023	4210520	1283460	153948
$W = aL^b$	0.995222	0.994148	0.966861	3263850	551276	631476
$W = aL^b$	0.995821	0.994966	0.972439	2855840	474360	526689

从 3 种鱼类身体维数的不同指标与重量的相关系数及一元指数回归方程的残差平方和的计算(表 11)可以看出: 由于白鲢和翘嘴红鲌横轴较长, 因此影响重量的主要因素是体长, 故采用长度来推算合适的; 长春鳊纵轴较高, 影响重量的主要因素是体高(或体周长), 其次要因素才是鱼体长度, 故采用体高(或体周长)来推算鱼体重量的结果比用长度来推算要好 60—70%; 因此可以认为鱼体不同维数对重量的影响取决于鱼体的体型。

3. 在鱼类年龄和生长的研究中, 往往要根据标本留在鳞片(或骨骼)环纹(或年轮)上的生长信息来推算鱼体的过去长度和重量。在推算重量之前, 一般先计算长度, 再由预先确定的重量-长度关系式来推算重量(方法 I)。

我们认为在上述的推算方法中, 从鳞片得到的长度并不是已知的重量-长度关系中的长度值, 两者之间偏差较大, 结果影响到最终计算的重量值。如果将推算得到的长度代入由它与鱼体重量重新建立的重量-长度关系式(方法 II), 再由鳞片的测定值分别进行鱼体的单个维数, 如长度、高度和体周长的推算后再利用本文推导的多元公式, 最终得到的重量值是否比一元公式更接近实际? 基于这些考虑, 我们计算了由 64 尾白鲢标本按不同公式推算的残差平方和(表 12)。

表 12 白鲢由鳞片推算重量的两种方法的残差平方和 (Q)

Table 12 Sum of squares of deviations (Q) from two methods of back-calculating weights from scales for silver carp

回归方程	残差平方和 类 别	Q, (g ²)	
		方法 I	方法 II
$W = aL^b$		30316136	29732800
$W = aL^{b_1}H^{b_2}$		32949636	29732800
$W = aL^{b_1}S^{b_2}$		30231927	29732800
$W = aL^{b_1}H^{b_2}S^{b_3}$		29732800	

可以看出, 方法 II 的推算结果比方法 I 要好; 然而, 不论采用一元或多元公式推算的残差平方和几乎都一样大, 看不出多元公式在推算中的优越性。

仔细推敲可以发现: 上述计算公式仅利用了鱼类遗留在鳞片上的生长信息, 实际上仍然停留在一维空间, 所以它们的推算结果与由鳞片直接来推算重量的结果一致。至于多维的推算公式, 有待进一步研究。

从多元公式的组成及应用情况来看, 我们认为真正有使用价值的是二元公式, 其中公式 $W = aL(l)^{b_1}S^{b_2}$ 可能适用于各种体型的鱼类生长研究。但是, 考虑到体周长的测量不如体高的测量方便, 公式 $W = aL(l)^{b_1}H^{b_2}$ 似乎更有实用意义。不过, 对于身体呈扁平形的鱼类(例如鳊)来说, 在不便测量体周长的情况下, 应当以体宽的测量值代替体高的测量值, 因为这类鱼身体的背腹轴很短而左右轴特别长, 体宽很可能是影响其重量的主要因素。

4. 在鱼类生长的研究中, 通常只需要采用一种长度测量值, 至于采用哪一种长度测量值最好, 目前尚无统一的看法。就本文所研究的 3 种鱼类来看, 尾部在鱼体上占的比例较

小，而它的长度又存在较大的个体差异（表 14），因此在描述鱼类的重量-身体维数关系时，采用体长测量值可能比全长或尾长的测量值更为合适。基于这一考虑，我们对多元公式的推导均着眼于鱼的体长，同时在应用一元与多元公式时分别按体长和全长进行了比较。应用结果表明，采用体长测量值的各类回归方程的预报精度都较采用全长测量值的回归方程为佳，这说明预先对鱼类线性维数的选择是符合实际的。看来，在描述大多数鱼类的重量-身体维数关系时，应采用体长测量值。

5. 鱼类的生长可以分为等距生长与非等距生长，这两种不同的生长模式通常是根据一元公式 $W = aL^b$ 中指数 b 的值（一般为 2-4）来判别的，即 $b = 3$ 时为等距生长， $b >$ 或 < 3 时则为非等距生长^[7]。所谓等距生长，这里是指鱼类生长过程中体形和比重都保持不变，显然与最初应用公式 $W = aL^3$ 时等距生长仅指体形不变的概念有一定的差别。在应用公式 $W = aL^b$ 来描述鱼类的重量-长度关系时，由于不能把比重变化的影响与真正的非等距生长的影响区别开来（Beverton and Holt, 1957）^[8]，因此只有当鱼类的体形和比重都保持不变时指数 b 才等于 3。否则，即使鱼类的体形维持一定，而比重发生某种程度的变化， b 值也会出现一定的偏差。不过，同一鱼类种群中不同个体的比重不存在多大的差别^[9]， b 值的波动应当主要指示鱼类体形的变化。人们普遍认为，属于等距生长的鱼类不过是极少数，而绝大多数的鱼类生长都是非等距的。

本文研究结果表明，白鲢、翘嘴红鲌和长春鲮的一元回归方程中回归系数 b 的值均在 3 左右，并且二元和三元回归方程中各偏回归系数值（ b_1 、 b_2 、 b_3 ）的和，都与一元回归方程中的 b 值相当接近（表 13）。依上述观点看来，3 种鱼类的生长都应当接近于等距生长，

表 13 3 种鱼类不同回归方程的回归系数值
Table 13 Regression coefficients of the various regression equations for three species of fish

回归方程	白 鲢	翘嘴红鲌	长 春 鲮
$W = aL^b$	3.09539	3.1742	3.01380
$W = aL^{b_1}H^{b_2} (b_1 + b_2)$	3.070386	3.21462	3.081922
$W = aL^{b_1}S^{b_3} (b_1 + b_3)$	3.05375	3.20316	3.053304
$W = aL^{b_1}H^{b_2}S^{b_3}(b_1 + b_2 + b_3)$	3.055632	3.214796	3.058214
$W = aI^b$	3.00052	3.02250	2.92666
$W = aI^{b_1}H^{b_2} (b_1 + b_2)$	3.002667	3.11682	3.04367
$W = aI^{b_1}S^{b_3} (b_1 + b_3)$	2.992908	3.10327	3.01704
$W = aI^{b_1}H^{b_2}S^{b_3} (b_1 + b_2 + b_3)$	2.9922262	3.122546	3.022871

表 14 3 种鱼类身体维数之间的比值
Table 14 The ratios of length (l) to other dimensions in three species of fish

鱼 名	H/ l		S/ l		(L - l)/ l	
	平 均 值	95% 置信限	平 均 值	95% 置信限	平 均 值	95% 置信限
白 鲢	0.3047	0.2546—0.3548	0.6920	0.5909—0.7931	0.2021	0.1135—0.2907
翘嘴红鲌	0.2028	0.1808—0.2248	0.4861	0.4381—0.5341	0.1992	0.1485—0.2499
长 春 鲮	0.3764	0.3334—0.4194	0.8234	0.7273—0.9195	0.1998	0.1582—0.2414

也就是说,在生长过程中它们的体形不会发生明显的变化。然而实际情况并非如此。经分类统计发现,3种鱼类100尾标本的体高、体周长和尾长分别与体长的比值皆有较大幅度的变动(表14)。这充分表明它们的生长都是非等距的。由此可见,b值距3的偏差不能定量地反映鱼类生长过程中体形的变化,而只能作为非等距生长的一个定性指标。正如Beverton和Holt (1957)^[8]所指出,除非b值正好等于3,指数b与动物的维数之间不存在简单的关系。

参 考 文 献

- [1] 中国科学院数学研究所统计组, 1979. 常用数理统计方法. 第83—110页. 科学出版社。
- [2] 陈佩薰等, 1965. 水生生物学集刊, 5(2): 272—281。
- [3] 复旦大学, 1979. 概率论, 第二册第二分册. 第334—348页. 人民教育出版社。
- [4] 赵根榕译(库得洛亚采夫, B. A., 捷米导维奇, B. П. 著), 1949. 高等数学简明教程. 第237—240页. 龙门联合书局。
- [5] 费鸿年译(勃朗, M. E. 著), 1957. 鱼类生理学, 上册, 第367—376页. 科学出版社。
- [6] 华元渝、胡傅林, 1981. 鱼类学论文集, (1): 125—132。
- [7] Bagenal, T. B. and Tesch, F. W. 1978. Age and growth. In methods for assessment of fish production in fresh waters. (IBP Handbook No. 3). pp. 101—136 (Ed. T. B. Bagenal), Blackwell Scientific Publications, Oxford. 365 pp. (3rd Edition).
- [8] Beverton, R. J. H. and Holt, S. J., 1957. On the dynamics of exploited fish populations. pp. 279—282, The relationship between weight and length. Fishery Invest., Lond., Ser. 2, 19, pp. 533.
- [9] Frost, W. E., 1945. *J. Anim. Ecol.*, 14(2): 106—124.
- [10] Fulton, T. W., 1904. The rate of growth of fishes, 22-nd Ann. Rep. Fish. Bd. Scotland, 1903. Part III: 141—241.
- [11] Hile, R., 1936. *Bull. U. S. Bur. Fish.*, 48: 211—317.
- [12] Huxley, J. S., 1924. *Nature*, 114: 895—896.
- [13] Lagler, K. F., 1953. Freshwater fishery biology. pp. 128—134, Length-Weight relationship and condition. Wm. C. Brown Company, Dubuque, Iowa, pp. 431.
- [14] Le Cren, E. D., 1951. *J. Anim. Ecol.*, 20: 201—219.
- [15] Meek, A., 1903. A contribution to our knowlorge of the growth of the plaice. Northumb. Sea Fish. Comm. Rep. Sci. Invest. 1903, 40—41.
- [16] Richards, O. W. and Kavanagh, A. J., 1945. The analysis of growth form. Essays on growth and form presented to D'Arcy Wentworth Thompson, pp. 188—230, Clarendon Press, Oxford.
- [17] Russell, E. S., 1914. Report on market measurements in relation to the English haddock fishery during the years 1909—11. Fish. Invest., Ser. II. 1, (1).

A STUDY ON THE RELATIONSHIP BETWEEN BODY WEIGHT AND BODY DIMENSIONS IN FISH

Hua Yuanyu and Ruan Jingrong

(Institute of Hydrobiology, Academia Sinica)

Abstract

The formula $W = a l^{b_1}$ (or $W = a L^{b_1}$), though widely recognized to be reflecting the relationship between body weight and body dimensions in growth studies of fish, does have its limitation. Proceeding from setting a boundary curve equation for a model fish and making use of the method for determining the volume of a rotating object, the authors established a multivariate formula for body weight, length, and height: $W = a l^{b_1} H^{b_2}$ (or $W = a L^{b_1} H^{b_2}$), and from which two other formulae have been derived, i. e., $W = a l^{b_1} S^{b_3}$ (or $W = a L^{b_1} S^{b_3}$) and $W = a l^{b_1} H^{b_2} S^{b_3}$ (or $W = a L^{b_1} H^{b_2} S^{b_3}$), in which W stands for body weight, L for total length, l for standard length, H for body depth, S for girth of fish, and b_1, b_2, b_3 for partial indices.

When checked with actual measurement of the population of *Hypophthalmichthys molitrix*, *Erythroculter ilishaeformis* and *Parabramis pekinensis*, including their various stages of growth, the multivariate formula gives better agreement with the data of actual measurement than does the unary form.

That the multivariate formulae can give better results is due to the fact that they reflect more comprehensively the effect of various dimensions on the weight of fish.

For fishes of divergent body forms, the extent to which the various dimensions affect the body weight is different, hence there should be some choice from among these dimensions when applied.

Since the body depth of a fish is easier to measure than is the girth, the binary formula involving body length and body depth is of more practical interest.

To sum up, the authors recommend the use of the formulae $W = a l^{b_1} H^{b_2}$ (or $W = a L^{b_1} H^{b_2}$) and $W = a l^{b_1} S^{b_3}$ (or $W = a L^{b_1} S^{b_3}$) in describing the relationship between body weight and body dimensions in theoretical or applied studies of fish growth.